Electrostática.

Bajo condiciones estáticas el operador $\frac{\partial}{\partial t}=0$ y para medios lineales, $\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$. Las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial se convierten en

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0} \qquad 1$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J} \qquad 2$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \qquad 3$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad 4$$

Estas ecuaciones se dividen en dos grupos: (1) con (3) en el estudio de la electrostática y (2) con (4) en el estudio de la magnetostática. En primer lugar se estudiará la electrostática. En este caso las dos ecuaciones se repiten a continuación:

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0} \qquad 1$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \qquad 3$$

Existe la identidad vectorial

$$-\nabla\times\nabla\varphi\equiv\boldsymbol{0} \qquad 5$$

En la ecuación (5) φ es cualquier función escalar. Aplicado a la electrostática, el escalar $\varphi\rightarrow\varphi_e$, el potencial electrostático. Sus unidades son V. En razón de la ecuación (5), se puede ver que al sustituir $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi_e$ en la ecuación (1), $\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ se satisface *siempre*.

Del estudio de campos vectoriales, si un campo vectorial se puede expresar como el gradiente de un campo escalar, el campo vectorial en cuestión es un campo conservativo. Entonces, como el campo electrostático es conservativo hay varios hechos importantes como consecuencia.

El campo eléctrico en un punto es la fuerza ejercida sobre una carga unitaria de prueba ubicada en el punto en cuestión.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{\boldsymbol{F}_e(\boldsymbol{r})}{q} \qquad 6$$

Aquí q es la carga, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ es el campo eléctrico en el punto y $\boldsymbol{F}_e(\boldsymbol{r})$ es la fuerza que actúa sobre q en el punto.
La expresión para el trabajo realizado W al aplicar una fuerza $\boldsymbol{F}$ a lo largo de una distancia $d\boldsymbol{l}$ está dado por

$$W = \int_a^b \boldsymbol{F} \cdot d\,\boldsymbol{l} \tag{7}$$

En la ecuación (7) ***F*** actúa desde el punto *a* hasta el punto *b*. Al utilizar la ecuación (6),

$$W = q \int_a^b \boldsymbol{E} \cdot d\,\boldsymbol{l} \tag{8}$$

Como $\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi_e$, la ecuación (8) se vuelve

$$W = -q \int_a^b \nabla \varphi_e \cdot d\,\boldsymbol{l} \tag{9}$$

Pero se sabe que $\nabla \varphi \cdot d\,\boldsymbol{l} = d\,\varphi$ de la definición de gradiente. Entonces

$$W = -q \int_a^b d\,\varphi_e = q[\varphi_e(a) - \varphi_e(b)] \tag{10}$$

Ahora *W/q* es el trabajo por unidad de carga o el potencial *V*. Entonces

$$V = \varphi_e(a) - \varphi_e(b) \tag{11}$$

De la ecuación (10) se ve que el trabajo realizado, o el potencial desarrollado, al moverse de un punto *a* hasta un punto *b* en un campo electrostático es independiente de camino entre *a* y *b*. Si se evalúa $q \oint \boldsymbol{E} \cdot d\,\boldsymbol{l}$, el resultado claramente es cero. Ningún trabajo se realiza al mover una carga *q* alrededor de un camino cerrado en una región que contiene un campo electrostático.

Según la ecuación (3), $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$, además $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi_e$.

Si se asume que ε es independiente de posición

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \nabla \cdot \epsilon \boldsymbol{E} = \epsilon \nabla \cdot \boldsymbol{E} \tag{12}$$

Al sustituir $\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi_e$ en la ecuación (12) se obtiene

$$\nabla \cdot -\epsilon \nabla \varphi_e = \rho$$

$$\rightarrow \nabla^2 \varphi_e = -\frac{\rho}{\epsilon} \tag{13}$$

Esta es la ecuación de Poissón.

Existen dos casos que nos interesan. Caso (1) $\rho = 0$ y caso (2) $\rho \neq 0$. Con $\rho = 0$ la ecuación (13) se convierte en

$$\nabla^2 \varphi_e = 0 \qquad 14$$

Esta es la ecuación de Laplace.
Las ecuaciones (13) y (14) son dos ecuaciones fundamentales en muchos campos de la ingeniería y la física
En resumen, para encontrar el campo electrostático cuando $\rho = 0$, se resuelve la ecuación de Laplace $\nabla^2 \varphi_e = 0$ sujeta a las condiciones de borde apropiadas para encontrar φ_e. Luego $\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi_e$.
Considere las condiciones de borde.

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E_1} - \boldsymbol{E_2}) = \boldsymbol{0} \qquad 15$$

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D_1} - \boldsymbol{D_2}) = \rho_s \qquad 16$$

Estas dos relaciones también pueden expresarse en términos de φ_e al usar $\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi_e$.

$$\boldsymbol{n} \times (\nabla \varphi_{e1} - \nabla \varphi_{e2}) = \boldsymbol{0} \qquad 17$$

$$\boldsymbol{n} \cdot (\epsilon_2 \nabla \varphi_{e2} - \epsilon_1 \nabla \varphi_{e1}) = \rho_s \qquad 18$$

Al examinar la ecuación (17) y recordando que el potencial en cualquier punto es independiente del camino tomado para llegar a ese punto en cuestión, la ecuación (17) implica no sólo la continuidad de las componentes tangenciales de $\boldsymbol{E}$ y de $\nabla \varphi_e$ sino también del potencial φ_e. Si esto no fuera cierto, se obtendrían valores diferentes para el potencial en una interfaz dependiendo de cómo se acerca a la interfaz. Pero el valor de φ_e es independiente del camino. Entonces

$$\varphi_{e1} = \varphi_{e2} \qquad 19$$

La ecuación (19) implica que el potencial escalar es continuo en una interfaz.

Considere el campo y el potencial debido a una carga puntual q.
Existe una región del espacio que contiene una carga puntual de magnitud q. La ley de Gauss expresa

$$\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} \, da = q \qquad 20$$

Se encierra la carga puntual por una esfera Gaussiana de radio r. La normal $\boldsymbol{n}$ a la superficie es tal que $\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n} = D_r$ donde D_r es la componente radial de $\boldsymbol{D}$.

$$\oint\!\!\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\,\boldsymbol{a} = q \qquad 21$$

Sobre la superficie de la esfera D_r es constante para r = constante. Como el área superficial de una esfera de radio r es $4\pi r^2$,

$$\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot d\,\boldsymbol{a} = 4\pi r^2 D_r(r) = q \qquad 22$$

$$\rightarrow D_r = \frac{q}{4\pi r^2} \qquad 23$$

Con $\boldsymbol{r}$ como el vector unitario radial,

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{r}\,D_r = \frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{r} \qquad 24$$

Como $\boldsymbol{D} = \epsilon\,\boldsymbol{E}$,

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}\boldsymbol{r} \qquad 25$$

La fuerza $\boldsymbol{F}_e$ es el producto de q por $\boldsymbol{E}$ estático:

$$\boldsymbol{F}_e = \frac{qq'}{4\pi\epsilon r^2}\boldsymbol{r} \qquad 26$$

La ecuación (26) es la ley de Coulomb para el campo electrostático
Para una carga puntual, $\boldsymbol{E}$ sólo tiene una componente radial, y $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi_e$ se reduce a

$$E_r = -\frac{d\,\varphi_e}{dr} \qquad 27$$

$$\frac{d\,\varphi_e}{dr} = -\frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \qquad 28$$

$$\int_a^b \frac{d\,\varphi_e}{dr}dr = -\int_a^b \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}dr \qquad 29$$

La diferencia en potencial entre a y b es

$$\varphi_e(b) - \varphi_e(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) \qquad 30$$

La ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas.

El operador Laplaciano en coordenadas rectangulares es:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad 31$$

Aplicado a $\varphi_e(x, y, z)$,

$$\nabla^2 \varphi_e = \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial z^2} = 0 \qquad 32$$

Una solución de (32) contiene constantes arbitrarias que se evalúan usando la condiciones de borde. Se aplica el método de separación de variables:
Se asume que $\varphi_e(x, y, z)$ es de la forma

$$\varphi_e(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \qquad 33$$

En la ecuación (33) $X(x)$ es una función de x solamente, $Y(y)$ es una función de y solamente y $Z(z)$ es una función de z solamente. Al sustituir la ecuación (33) en la ecuación (32) se obtiene

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0 \qquad 34$$

La prima significa diferenciación parcial con respecto al variable respectivo. Al dividir la ecuación (34) por XYZ, se obtiene

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0 \rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} \qquad 35$$

La mano derecha es una función de x y y solamente mientras la derecha es una función de z solamente. Cada término debe igualar a una constante diferente. Por ejemplo,

$$-\frac{Z''}{Z} = -n^2 \qquad 36$$

En la ecuación (36) n^2 es una constante independiente de z y todavía arbitraria. La ecuación (35) se puede escribir como

$$\frac{X''}{X} + n^2 = -\frac{Y''}{Y} \qquad 37$$

Una vez más al utilizar un argumento idéntico con el que condujo a la ecuacion (36), se concluye que

$$\frac{Y''}{Y} = -m^2 \qquad 38$$

donde, una vez más, la constante m^2 es independiente de y, pero arbitraria.
La ecuación diferencial restante es

$$\frac{X''}{X} + n^2 - m^2 = 0 \qquad 39$$

La apariencia de la ecuación (39) se mejora si se define un termino l de manera que

$$l^2 + m^2 - n^2 = 0 \qquad 40$$

Luego, la ecuacion (39) es

$$\frac{X''}{X} + l^2 = 0 \qquad 41$$

El juego de relaciones en (36), (38) y (41) puede escribirse ahora como

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - n^2 Z = 0 \qquad 37a$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + m^2 Y = 0 \qquad 39a$$

y

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + l^2 X = 0 \qquad 41a$$

Cada una de las ecuaciones (37a), (39a) y (41a) es de la forma

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + a^2 u = 0 \qquad 42$$

Note: En la ecuación (37a), el signo de n^2 es el negativo del a^2 de la ecuación (42). Pero si $a = \pm jn$ donde $j = \sqrt{-1}$, la ecuación (42) es idéntica con la ecuación (36)
Para resolver la ecuación (42), se asume una solución y se requiere que satisfaga la ecuación diferencial. Se ponga

$$u = e^{jb} \qquad 43$$

Puesto que $\dfrac{d^2 u}{d\xi^2}=b^2 u$, la ecuación (42) se vuelve

$$(b^2+a^2)u=0 \qquad 44$$

La ecuación (44) puede satisfacerse para todo *u* al requerir que

$$b=\pm ja \qquad 45$$

Luego, la solución de (42) puede escribirse como

$$u=A\,\mathrm{e}^{ja\xi}+B\,\mathrm{e}^{-ja\xi} \qquad 46$$

con *A* y *B* constantes arbitrarias. En virtud del teorema de De Moivre, una forma alternativa de (46) es

$$u=C\cos a\xi+D\,\mathrm{sen}\,a\xi \qquad 47$$

Otra vez, *C* y *D* son constantes arbitrarias. Con una solución de la ecuación (42) disponible, se puede escribir las soluciones del juego de las ecuaciones (37a), (39a) y (41a). Las expresiones requeridas son

$$\begin{aligned} Z(z)&=A\,\mathrm{senh}(nz)+B\cosh(nz)\\ Y(y)&=C\,\mathrm{sen}(my)+D\cos(my)\\ X(x)&=E\,\mathrm{sen}(lx)+F\cos(lx)\end{aligned} \qquad 48$$

En virtud de la ecuación (33), el potencial $\varphi_e(x,y,z)$ está dado por

$$\varphi_e(x,y,z)=(E\,\mathrm{sen}\,lx+F\cos lx)(C\,\mathrm{sen}\,my+Dcos\,my)(A\,\mathrm{senh}\,nz+B\cos nz) \qquad 43a$$

Como la ecuación (42) es lineal, el principio de superposición, válido para ecuaciones lineales, es apto aquí. Esto significa que combinaciones lineales de soluciones de la forma de (43a) también serán una solución de la ecuación de Laplace.